методической конференции «Новые образовательные технологии в вузе», 23 - 26 ноября 2004 г., Екатеринбург, Россия, сс. 156 - 158.

Рощева Т.А., Митюшов Е.А.

СОВРЕМЕННОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ТРАДИЦИОННЫХ РАЗДЕЛОВ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

teormech@mmf.ustu.ru
ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
г. Екатеринбург

В работе предлагается современный метод описания движения твердого тела, позволяющий в полной мере использовать стандартные информационные ресурсы и получать результаты исследования в любом виде, включая визуализацию движения в реальном режиме времени.

Modern description of standard chapter of theoretical mechanics is suggested in this paper. Method of solid body motion definition is proposed, which allows us to in full use available common information recourse and to obtain investigation results in any kind, including motion visualization in actual time.

На протяжении всей истории человеческой цивилизации при передаче накопленных знаний следующим поколениям естественным образом менялись содержание, методы и формы обучения. Происходила переоценка значимости тех или иных результатов, их уточнение (или опровержение), способы передачи и хранения информации. Особенно высокими темпами эти процессы генерируются в настоящее время, в связи с происходящей информационной революцией. К сожалению, основная учебная литература, вновь издаваемая и переиздаваемая в России для базовых курсов в системе высшего профессионального образования, не в полной мере отвечает требованиям и возможностям новой информационной среды. Имеются единичные примеры учебных пособий по естественнонаучным и общепрофессиональным дисциплинам, в которых даются примеры решения стандартных задач традиционными методами, но с применением новых вычислительных средств. При этом практически не подвергается изменению содержательная часть курса. В целом, идеология, заложенная в учебных курсах, отражает уровень преподавания середины 20 века.

В частности, в преподавании теоретической механики к этому времени завершился переход к векторному способу изложения основного учебного материала, уменьшилось применение графических методов решения задач, которые сейчас практически не используются. Решение прикладных задач с использованием векторных моделей продолжает выполняться преимущественно громоздкими геометрическими методами. В преподавании теоретической механики в технических вузах практически не используются методы матричной, линейной и тензорной алгебр. При этом матричные методы уже давно и широко используются в последующих учебных курсах, а также в различных пакетах прикладных программ. Это, очевидно, требует существенной модернизации методики преподавания теоретической механики.

В данной работе показана возможность применения эффективного матрично-тензорного формализма при записи основных теорем кинематики твердого тела и его использования для численно-аналитического исследования движения пространственных механизмов.

Изложение теоретического материала основано на представлении движения твердого тела как движения подвижного триэдра, жестко связанного с телом, относительно неподвижной системы отсчета и наделением физического пространства не векторной, а матричной структурой, т.е. между точками пространства устанавливаются отношения, представленные в виде матричных уравнений.

Поставим в соответствие операциям над векторами их матричную реализацию.

Пусть Oxyz – прямоугольная декартова система координат. Как известно, тройка чисел, определяющих положение точки (или координаты вектора), может быть представлена в виде матрицы-столбца или матрицы–строки. Дополним возможную запись вектора $\vec{l} = \{l_x, l_y, l_z\}$ матрицей и поясним смысл введения этого представления.

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -l_z & l_y \\ l_z & 0 & -l_x \\ -l_y & l_x & 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Попытки формализовать операцию векторного произведения двух векторов, как известно, в некоторой степени реализованы с использованием определителей 3 порядка.

Представление (1) позволяет определять эту операцию достаточно просто:

$$\vec{a} \times b \to A\hat{b},\ \ \hat{b} = (b_x b_y b_z)^T$$

Попутно заметим, что неассоциативная операция двойного векторного умножения при таком представлении становится ассоциативной в силу ассоциативности операции умножения матриц. То есть $\vec{c} \times \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = CA\hat{b}$.

Не останавливаясь на доказательстве этого и приведенных ниже соответствий (все доказательства основаны на аккуратном проведении соответствующих вычислительных процедур и сравнении полученных результатов), представим возможности матричной реализации операций над векторами в виде таблицы:

Таблица 1. Матричная реализация операций над векторами

Наименование операции	Определение операции в векторном пространстве	Матричная реализация операции
Сложение векторов	$\vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b}$	$\hat{c} = \hat{a} \pm \hat{b}$
Умножение вектора на число	$\vec{c} = \alpha\vec{a}$	$\hat{c} = \alpha\hat{a}$

Наименование операции	Определение операции в векторном пространстве	Матричная реализация операции
Скалярное произведение двух векторов	$\lambda = \vec{a} \cdot \vec{b}$	$\lambda = \hat{a}^T \hat{b}$
Векторное произведение двух векторов	$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$	$\hat{c} = A\hat{b}$
Двойное векторное произведение	$\vec{d} = \vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$	$\hat{d} = AB\hat{c} = CA\hat{b} = BC\hat{a}$
Смешанное произведение	$\vec{d} = \vec{a}\left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$	$\hat{d} = \hat{b}^T A^T \hat{c} = \hat{a}^T C^T \hat{b} = \hat{c}^T B^T \hat{a}$
Вектор-проекция вектора на ось*)	$\vec{a}' = Пр_{\vec{l}}\left(\vec{a}\right) = \left(\vec{a}\vec{l}^{\,0}\right)\vec{l}^{\,0}$	$\hat{a}' = \hat{l}^0 \hat{l}^{0T} \hat{a}$
Алгебраическая проекция вектора на ось	$a' = пр_l\left(\vec{a}\right) = \vec{a}\vec{l}^{\,0}$	$\hat{a}' = \hat{a}^T \hat{l}^{\,0}$

В дальнейшем для того, чтобы оставаться в рамках привычных представлений, мы будем использовать терминологию векторного пространства. Так, оставим в обиходе такие геометрически наглядные понятия как радиус-вектор точки, направляющий вектор прямой, орты координатных осей и др., неспособные вызвать путаницу в восприятии материала.

Рассмотрим преобразования пространства, связанные с движением твердого тела.

Как известно, абсолютно твердое тело – это система материальных точек, расстояния между которыми остаются неизменными при любых физических процессах. Пусть $Ox'y'z'$ - система координат, жестко связанная с телом. Очевидно, изменение положения тела в пространстве относительно выбранной неподвижной системы отсчета (движение тела) абсолютно точно определяется изменением положения этой ($Ox'y'z'$) системы координат. Этот факт позволяет в дальнейшем в общем случае говорить о преобразованиях координатной системы $Ox'y'z'$ в трехмерном (линейном) пространстве R^3.

Как известно, две группы линейных преобразований позволяют полностью описывать движение твердого тела в пространстве трех измерений: параллельный перенос и поворот вокруг определенной оси.

Рассмотрим более подробно ориентированный поворот вокруг оси. Такое преобразование оставляет на месте все точки выбранной оси. Остальные точки перемещаются в плоскостях, перпендикулярных оси, в заданном направлении.

Считается, что преобразование определено, если указаны матрицы $A_{3\times3}$ и $B_{3\times1}$, с помощью которых устанавливается соответствие между точками пространства после преобразования (образом) и до преобразования (прообразом). Это соответствие в общем случае преобразования движения имеет вид

$$\hat{r}' = A\hat{r} + B\,.$$

Пусть l - ось, относительно которой осуществляется поворот на заданный угол φ. Положение оси в пространстве с выбранной системой отсчета определено точкой $М_1$, через которую эта ось проходит

$$\hat{r}_{M_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix},$$

и направляющим ортом оси

$$\hat{l} = \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix}.$$

Определим матрицы $A_{3\times3}$ и $B_{3\times1}$ такие, что

$$\hat{r}' = A\hat{r} + B.$$

Пусть С - точка пересечения оси l и плоскости, в которой перемещается точка М. Разложим вектор $\hat{r}'_M - \hat{r}_M = \Delta\hat{r} = C\hat{M}' - C\hat{M}$ по базису

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{\left|C\vec{M}\right|} C\hat{M} \quad \text{и} \quad \hat{e}_2 = \frac{1}{\left|C\vec{M}\right|} L(C\hat{M}):$$

$$\Delta\hat{r} = ((\cos\varphi - 1)E + \sin\varphi L)(C\hat{M}). \qquad (2)$$

С учетом равенства

$$C\hat{M} = \left(E - \hat{l}\hat{l}^T\right)\left(\hat{r}_M - \hat{r}_{M_1}\right).$$

перепишем выражение (2) в виде

$$\Delta\hat{r} = \hat{r}_M - \hat{r}_{M'} = ((\cos\varphi - 1)E + \sin\varphi \cdot L)\left(E - \hat{l}\hat{l}^T\right)\cdot\left(\hat{r}_M - \hat{r}_{M_1}\right) = -B_0\hat{r}_M + B_0\hat{r}_{M_1},$$

где $B_0 = ((\cos\varphi - 1)E + \sin\varphi L)\left(E - \hat{l}\hat{l}^T\right)$.

Откуда $\hat{r}_{M'} = (E - B_0)\hat{r}_M + B_0\hat{r}_{M_1}$ или $\hat{r}_{M'} = A\hat{r}_M + B$, где $A = E - B_0$; $B = B_0\hat{r}_{M_1}$. Матрицы A и B однозначно определены заданием направления оси l, точки, через которую она проходит и углом поворота φ

В дальнейшем конечные перемещения будут интересовать нас в меньшей степени. Поэтому приведем выражения для матриц A и B в случае бесконечно малого поворота на угол $d\varphi$, которые получаются разложением тригонометрических функций в степенной ряд. Оставляя только члены первого порядка малости, получим

$$\hat{r}_{M'} = A\hat{r}_M + B;\; A = E + Ld\varphi;\; B = d\varphi L r_{M_1}. \qquad (3)$$

Дадим физическую интерпретацию полученным результатам. Для этого будем говорить уже не о повороте пространства, а о повороте твердого тела на бесконечно малый угол вокруг оси. Определим элементарное перемещение точки М при таком движении. С учетом соотношений (3)

$$d\hat{r}_M = d\varphi L(\hat{r}_M - \hat{r}_{M'}) = d\varphi L(M_1\hat{M}) \quad (4)$$

Поделив обе части уравнения (4) на dt получим выражение для скорости точки М твердого тела

$$\hat{v}_M = \frac{d\hat{r}_M}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} L(M_1\hat{M}) \quad (5)$$

Производная $\frac{d\varphi}{dt}$ в каждый момент времени характеризует быстроту изменения угла поворота твердого тела вокруг определенной оси *l*, может принимать как положительные, так и отрицательные значения и называется алгебраической угловой скоростью твердого тела в данный момент времени.

Остановимся подробнее на сомножителе $\frac{d\varphi}{dt}L$:

$$\frac{d\varphi}{dt}L = \begin{pmatrix} 0 & -l_z\dot{\varphi} & l_y\dot{\varphi} \\ l_z\dot{\varphi} & 0 & -l_x\dot{\varphi} \\ -l_y\dot{\varphi} & l_x\dot{\varphi} & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Этот матричный сомножитель полностью характеризует операцию вращения вокруг выбранной оси: направление оси, направление вращения, величину угловой скорости. Тензором угловой скорости назовем кососимметрический тензор Ω, определяемый матрицей (6). В том, что это тензор, нетрудно убедиться, записав формулы преобразования Ω при переходе к новому базису. Правила преобразования соответствуют правилам преобразования компонент тензора второго ранга, Ω также является оператором линейного преобразования. Собственный вектор этого преобразования, соответствующий нулевому собственному значению оператора Ω

$$\hat{\omega} = \dot{\varphi}\begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

называется вектором угловой скорости твердого тела.

Таким образом,

$$\hat{v}_M = \Omega\hat{r}'_M, \quad (7)$$

где $\hat{r}'_M = M_1M$ - радиус-вектор точки М с началом в точке M_1. Заметим, что при получении формулы (7) никакими специальными свойствами точку M_1 мы не наделяли, кроме того, что она принадлежит оси вращения. Эта формула носит название формулы Эйлера и в векторной записи имеет вид

$\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}_M$.

Рассмотрим такое движение твердого тела, при котором одна его точка остается неподвижной во все время движения. Так как все точки тела при таком движении перемещаются вдоль траекторий, расположенных на поверхностях сфер, это движение называется сферическим.

Движение подвижной системы отсчета относительно неподвижной полностью определяется заданием матрицы линейного преобразования

$$P = P(t) = \left\| \alpha_{ij}(t) \right\| \tag{8}$$

Элементы этой матрицы - направляющие косинусы ортов подвижной системы отсчета $\alpha_{ij}(t) = \cos(Ox_i \hat{;} Ox'_j)$. Нетрудно показать, что одним из собственных значений этой матрицы является 1. Это означает, что найдется система коллинеарных собственных векторов, удовлетворяющих равенству $P\hat{l} = \hat{l}$.То есть в каждый момент времени движения существует мгновенная ось вращения тела.

Определим тензор угловой скорости с помощью оператора, задаваемого матрицей (8).

Пусть $P(t): r_0 \to r$, тогда для любого момента времени выполняются соотношения

$$\hat{r} = P(t)\hat{r}_0 \tag{9}$$

$$\hat{r}_0 = P^{-1}(t)\hat{r}\,. \tag{10}$$

Продифференцировав обе части равенства (9) по времени, с учетом зависимости (10), получим

$$\dot{\hat{r}} = \dot{P}(t)\hat{r}_0 = \dot{P}(t)P^{-1}(t)\hat{r}\,.$$

Сопоставление этого выражения с формулой, выражающей скорость точки тела при его повороте вокруг оси (7), дает

$$\Omega = \dot{P}(t)P^{-1}(t) \tag{11}$$

Тензор углового ускорения $\mathcal{E}$ получаем дифференцированием по времени тензора угловой скорости $\mathcal{E} = \dot{\Omega}$.

Привлекательность матричной структуризации пространства проявляется в наибольшей степени при определении ускорений точек движущегося тела. Действительно, продифференцировав соотношение (7) по времени, получим формулу для определения ускорения точек тела, совершающего сферическое движение,

$$a_M = \dot{\hat{v}}_M = \dot{\Omega}\cdot\hat{r}_M + \Omega\dot{r}_M = (\dot{\Omega} + \Omega^2)\hat{r}_M = (\,\mathcal{E} + \Omega^2)\hat{r}_M\,.$$

Формула Ривальса для определения ускорения точек свободного тела принимает вид

$\hat{a}_M = \ddot{\hat{r}}_A + (\mathcal{E} + \Omega^2)(A\hat{M})$,

где $\ddot{\hat{r}}_A$ -слагаемое, определяемое параллельным переносом и равное ускорению произвольно выбранной точки A тела.

Использование матричного исчисления позволяет алгоритмизировать поиски решения многих разнородных с точки зрения традиционного (в рамках векторной алгебры) изложения задач теоретической механики.

Рубан Г.А., Кабанов А.М.

ЭЛЕКТРОННЫЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ РЕСУРСЫ – БАЗА ДЛЯ ИНТЕГРАЦИИ УЧЕБНЫХ ДИСЦИПЛИН

Филиал УГТУ-УПИ в г. Краснотурьинске
г. Краснотурьинск

Статья об интеграции учебных дисциплин с изучением иностранного языка на базе электронных образовательных ресурсов. Описаны способы взаимодействия преподавателей для достижения общей цели.

The article is about the integration of subjects at the University on the base of electronic resources. Here there are some ways of trainers' cooperation to achieve the common aim.

Электронные образовательные ресурсы, такие как мультимедийные учебники, пособия, презентации способствуют не только усвоению того или иного курса. Они могут также являться хорошим средством для интеграции учебных дисциплин, что помогает, во-первых, более глубокому их пониманию и усвоению студентами и, во-вторых, осознанию студентами необходимости знаний, получаемых на занятиях по дисциплинам, предшествующим специальным курсам, в-третьих, дает возможность повторить и углубить уже полученные ранее знания.

Так, например, при прохождении курса общей химии студентам металлургических специальностей предлагается тема «Флотационные реагенты». Общая химия читается студентам на первом курсе, а процесс флотации изучается на третьем курсе при прохождении спец. дисциплины «Обогащение руд». В результате студенты зачастую не осознают важности информации и необходимости ее для своей будущей профессии, что не способствует тщательному изучению данной темы и запоминанию. Имеющиеся в филиале у преподавателя курса «Обогащение руд цветных металлов» видеоматериалы, отснятые на действующей обогатительной фабрике, и презентации на их основе могут быть включены в лекционный материал преподавателя общей химии. При этом знакомство с реальным металлургическим процессом будет стимулировать студентов к более глубокому изучению предлагаемого материала, так как появляется осознание того, что данный материал необходим в будущем. Впоследствии при прохождении курса «Обогащение руд», процесс флотации будет узнаваем студентами по презентациям и видеоматериалам, а преподаватель курса осво-